

893. D'Amore B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados. Duval, R. & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Comentarios a los artículos de Bruno D'Amore y de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 237-254. ISBN: 978-958-8972-31-2; e-ISBN: 978-958-8972-32-9. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*

Una riflessione sui testi qui presentati da Raymond Duval

Bruno D'Amore

Quel che sempre mi ha colpito ed entusiasmato del lavoro di ricerca e riflessione dell'amico Raymond Duval è la sua costante e sincera attenzione ai problemi veri dell'apprendimento.

Molti ricercatori, attratti verso la didattica della matematica da questioni concrete, legate all'apprendimento degli studenti, dopo qualche anno assaporano il gusto inebriante della ricerca astratta legata a temi epistemologici, semiotici, filosofici e dimenticano l'aula, lo studente, l'apprendimento. A mio avviso è come se un ricercatore di medicina si dedicasse alla filosofia dell'acido acetilsalicilico e alla semiotica del diazepam, dimenticando i malati che stanno aspettando nuovi rimedi per i loro problemi reali e concreti.

Conobbi personalmente Duval nel 1995, durante un ICMI study sull'apprendimento della geometria dove tenemmo due relazioni consecutive, e da allora la nostra frequentazione è stata assidua, continua; l'anno dopo era mio collaboratore nel Topic Group 14 a Siviglia, durante ICME 8: *Infinite processes throughout the curriculum*, 14-21 luglio, del quale ero Chief Organizer. Ho imparato tanto da lui, dai suoi testi, dalla discussione personale, dall'essere stato suo ospite a Lille come potenziale studente di dottorato, forse è lo studioso che, direttamente e personalmente, mi ha insegnato di più.

Mai, in nessuno scritto, in nessuna conferenza, in nessun corso, in nessuna occasione egli dimentica che il problema di fondo della didattica della matematica è il suo apprendimento o, meglio, la ragione del suo mancato apprendimento.

Questi tre articoli sono esemplari e costituiscono per tutti noi un'occasione di riflessione e di ripensamento critico sulla sua stessa opera, intesa in senso più generale.

In uno di questi, Duval si concentra sulle condizioni cognitive dell'apprendimento della geometria puntando l'attenzione su alcuni dei problemi più spinosi: lo sviluppo della visualizzazione, la differenziazione dei ragionamenti che caratterizzano il discorso geometrico ed il suo apprendimento, il coordinamento dei suoi funzionamenti.

Ho avuto il privilegio di ascoltare in anteprima questo genere di riflessioni tanto che, in un convegno tenutosi in mio onore presso l'Università di Bologna l'8 ottobre 2011, essendo presente fra i relatori Raymond Duval, gli chiesi di sviluppare proprio questo genere di ragionamento come primo intervento, ad inaugurazione della giornata, di fronte a didatti, sì, ma anche matematici e rettori.

Non posso non notare che da decenni si studia la problematica della visualizzazione in geometria; come non ricordare l'opera pionieristica in tal senso del grande Efraim Fischbein (1920 - 1998) che

fu il primo didatta vero della matematica che io conobbi (in Italia, nel 1980). Ma Duval lo fa con i suoi strumenti affascinanti ed efficaci, con una capacità analitica che lascia stupefatti.

In un altro articolo qui presentato propone l'analisi cognitiva di problemi di comprensione (più in generale) dell'apprendimento della matematica. Le domande di ricerca che si pone sembrano essere di una ingenuità disarmante (¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen con la comprensión de las matemáticas? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas?), ma è proprio questa la loro forza, il coraggio di affrontare il problema alle radici, così com'è vissuto da un insegnante nelle sue ore di lezione, in aula. Con una semplicità che lascia stupidi, Duval è capace di riportare il problema generale a quello della rappresentazione (Una representación es algo que se pone en lugar de otro algo. Pero al mismo tiempo esta noción puede ser elusiva odemasiado formal. ¿Cuál es la naturaleza de este "algo que se pone en lugar de ..."?). E qui inizia la sua analisi che lo fa partire teoricamente da studi di Piaget degli anni '20 e lo portano su su, fino a noi, all'attualità.

Fra le tematiche matematiche più significative che fanno parte degli studi iniziali di Duval, chi non ricorda il *glissement* fra i verbi avere ed essere relativo alla mancata costruzione cognitiva dell'infinito da parte degli allievi, chi non ricorda la profonda distinzione fra dimostrazione e argomentazione che ha impegnato, prima nello studio e poi nella riflessione, tutti noi? Duval riprende in questa occasione l'idea di *prova*, dalle caratteristiche un po' più generali rispetto all'idea matematica di dimostrazione.

Indubbiamente, il processo di prova (e, ancor più, a mio avviso, quello di dimostrazione) costituisce di per sé un apparato matematico complesso dal punto di vista epistemologico, tanto che ancora dopo de millenni e mezzo, se ne discute. Ma dal punto di vista della comprensione e dunque sul suo funzionamento cognitivo i problemi sono ancora maggiori. Si chiede, in forma apparentemente ingenua, l'Autore: ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en atravesarlo verdaderamente?

Sappiamo che lo studio di questo oggetto ha creato tre filoni di studio nell'ambito della didattica della matematica: una corrente psicologica che assume come modello del ragionamento le forme aristoteliche (ad esso fanno riferimento gli studi iniziali di Piaget ed Inhelder, per esempio); una corrente didattica che mette in evidenza una relazione di interazione fra le figure, i teoremi e le definizioni, giungendo a produzioni discorsive, alla quale si rifanno lavori di Balacheff; una corrente che sfrutta l'idea di modelli di ragionamento che funzionano come macchine di inferenza, un po' come nell'intelligenza artificiale, tipiche della fine degli anni '80.

Duval analizza ogni corrente e riesce a fornire interpretazioni personali del funzionamento della prova; giunge a evidenziare varie possibili interpretazioni dei malintesi che possono avvenire nel caso dell'apprendimento cognitivo della prova, riaffermando la necessità già evidenziata negli anni '90 in suoi stessi scritti, della coordinazione dei passaggi formali fra proposizioni, all'interno della lingua materna.

Suggerisce anche una visualizzazione di carattere semiotico che regola il funzionamento di una prova: desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha; una o varias flechas llegan a un teorema pero sólo una flecha puede salir de él; una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella. Una esemplificazione di una semplicità elegante. Suggerisce anche un uso euristico delle figure che potrebbe costituire una base cognitiva notevole.

Il ricercatore può trarre vantaggio dallo studio di questi tre articoli, ma anche quel maestro che si rende conto del malessere cognitivo dei suoi allievi e cerca di interpretarlo in maniera intelligente, cercando non i sintomi del male, i segni, gli errori, ma le cause che li hanno generati, cause sulle quali intervenire.

In modo più specifico, nel primo articolo Duval prende in esame le condizioni cognitive dell'apprendimento della geometria, la funzione che ha in questo processo la visualizzazione, le differenze fra i vari tipi di ragionamento e come si coordinano tra loro i rispettivi funzionamenti. In quanto al primo punto, egli riesce a produrre una classificazione dei ruoli che assumono le figure all'interno delle attività geometriche che costituiscono le attività degli studenti, nel processo di apprendimento. Ovviamente questi ruoli devono essere esaminati sulla base del funzionamento cognitivo, il che pone una dualità di estremo interesse fra la visualizzazione iconica e non iconica. Questa dualità condiziona il modo di vedere che si realizza in geometria, spesso dato per scontato, acquisito senza un esplicito processo di insegnamento - apprendimento; in particolare la decostruzione dimensionale delle forme. Inoltre, una cosa è il vedere, ben altra il dire; la necessità di fondere queste due azioni si scontra con la difficoltà di farle confluire in un'attività unica o, per lo meno, fluida. Per esempio, come una proposizione può essere trasformata in figura? O come una figura può essere vista come un contro esempio dell'enunciato di una congettura? Come le figure rappresentano una definizione?

Nel secondo articolo, Duval propone un'analisi cognitiva dei problemi di comprensione nell'apprendimento della matematica.

Il primo punto che si deve prendere in esame è come si possono caratterizzare le attività matematiche da un punto di vista cognitivo.

Per prima cosa, egli esamina il ruolo "capitale" delle rappresentazioni semiotiche; rilancia l'idea di paradosso cognitivo dell'accesso agli oggetti di conoscenza; e mostra la grande varietà di rappresentazioni semiotiche usate in matematica.

Dopo di che, analizza i processi di pensiero che entrano in gioco nell'attività matematica. Ma lo fa in forma problematica: come descrivere la grande varietà di processi matematici, usando ed evidenziando i vari registri che si mettono in uso in tali processi, anche con esempi specifici. Sempre con ampi ricorsi ad esempi, aritmetici e geometrici, tratta delle trasformazioni semiotiche di trattamento e conversione. Certo, i problemi che quest'analisi pone sono molteplici; per esempio il problema di riconoscere lo stesso oggetto matematico attraverso rappresentazioni i cui contenuti sono eterogenei.

Infine, Duval propone due fonti di incomprendimento nell'apprendimento della matematica, e le fa coincidere precisamente con le due trasformazioni semiotiche. Per primo tema, la complejidad y la especificidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional; qui gli esempi forniti sono molteplici. Come secondo tema, la conversión de representaciones o cambio de registro. Entrambe le fonti di incomprendimento portano al problema di riconoscere in qualsiasi contenuto di una rappresentazione, e qualsiasi sia il registro usato, quello che è matematicamente rilevante, rispetto a quello che non lo è.

Nel terzo articolo, Duval studia i processi matematici di prova ed in particolare esamina il funzionamento cognitivo e la comprensione di tali processi da parte di studenti.

Per prima cosa fornisce una ampia analisi degli studi sulla complessità cognitiva del funzionamento del ragionamento. Ma anche riflessioni profonde su quali siano le caratteristiche di un ragionamento, cominciando dall'idea di organizzazione discorsiva delle proposizioni. Questo comporta: lo studio delle componenti "interne" del significato di una proposizione e una analisi dello statuto delle proposizioni e delle differenze funzionali tra esse nello sviluppo discorsivo (nelle diverse accezioni di ragionamento, argomentazione, prova ecc.). Riprendendo suoi precedenti studi su questo stesso tema, Duval propone un modo di vedere e determinare il funzionamento cognitivo

specifico di una prova in matematica mostrando, tra l'altro, come cambia il focus all'interno di uno "spazio del significato" di una proposizione; se è vero che en el habla ordinaria y las interacciones sociales, las únicas características del significado que se activan para cualquier proposición expresada son su contenido (informativo) y su valor pragmático de comunicación, en el razonamiento, los valores epistémicos llegan a ser las características predominantes del significado, porque el razonamiento juega con las diferencias de los valores epistémicos de las proposiciones. Questa osservazione è sufficiente per l'avvio di una analisi profonda, basata anche su esperienze di aula.

Successivamente formula il problema di che cosa sia e di come si possa formulare l'apprendere a provare, iniziando dal domandarsi che differenza ci sia tra un ragionamento valido e non valido. Se la domanda che ci si pone è di carattere cognitivo, si può fare riferimento alla classica distinzione di Nicolas Balacheff del 1987, il quale distingue quattro tipi di prove: empirismo ingenuo, esperimento cruciale (entrambe sono prove pragmatiche basate sull'osservazione), esperimento generico e esperimento mentale (queste due sono prove di tipo intellettuale, basate sulla necessità dell'affermazione).

Infine, esamina come si possono indurre gli studenti a far funzionare cognitivamente il ragionamento deduttivo, il che chiama in causa vari fattori tra i quali emergono per importanza: la differenziazione e la coordinazione dei registri di rappresentazione semiotica, analizzare l'organizzazione deduttiva e come essa funziona.